

May 2024

B.Tech ME / ME (Hindi) - II SEMESTER

Mathematics-II (Calculus, Ordinary Differential Equation and Complex Variable)

BSC-106-A-24

Time: 3 Hours

Max. Marks:75

- Instructions:**
1. It is compulsory to answer all the questions (1.5 marks each) of Part -A in short.
 2. Answer any four questions from Part -B in detail.
 3. Different sub-parts of a question are to be attempted adjacent to each other.

PART -A

Q1 (a) Evaluate $\iint xy \, dx \, dy$ over the positive quadrant of the circle (1.5)
 $x^2 + y^2 = a^2$.

मूल्यांकन करें $\iint xy \, dx \, dy$ वृत्त के धनात्मक चतुर्थांश पर $x^2 + y^2 = a^2$

(b) State Liouville's Theorem. (1.5)

लिउविले के प्रमेय का बयान लिखिए।

(c) Evaluate (1.5)

$$\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{4z-x^2}} dy \, dx \, dz$$

मूल्यांकन करें

$$\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{4z-x^2}} dy \, dx \, dz$$

(d) Solve (1.5)

$$p^2 + 2xp - 3x^2 = 0$$

हल करें

$$p^2 + 2xp - 3x^2 = 0$$

(e) Explain first order exact differential equation with example. (1.5)

प्रथम कोटि सटीक अवकल समीकरण को उदाहरण सहित समझाइए।

(f) Find the expansions for $J_0(x)$ and $J_1(x)$. (1.5)

$J_0(x)$ और $J_1(x)$ के लिए विस्तार खोजें।

(g) Solve (1.5)

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

हल करें

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

(h) Explain the following:

(1..

1. Analytic function
2. Harmonic function
3. Entire function

निम्नलिखित को समझाइये:

1. वैश्लेषिक फलन
2. हार्मोनिक फलन
3. संपूर्ण फलन

(i) Show that the following function is an analytic function.

(1.5)

$$e^x (\cos y + i \sin y)$$

दिखाएँ कि निम्नलिखित फलन एक विश्लेषणात्मक फलन है।

$$e^x (\cos y + i \sin y)$$

(j) Give an example of the following:

(1.5)

1. Removable singularity
2. Essential singularity
3. Pole

निम्नलिखित का एक उदाहरण दीजिए

1. हटाने योग्य विलक्षणता
2. आवश्यक विलक्षणता
3. ध्रुव

PART - B

Q2 (a) Find the centre of gravity of a quarter of the ellipse, assuming surface density 1 at all points. (8)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

दीर्घवृत्त के एक चौथाई भाग का गुरुत्व केंद्र ज्ञात कीजिए, सभी बिंदुओं पर सतह घनत्व 1 मानते हुए।

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(7)

(b) Verify Green's theorem in the plane for

$$\int_C (3x^2 - 8y^2) dx + (4y - 6xy) dy$$

Where C is the boundary of the region bounded by

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1$$

ग्रीन प्रमेय सत्यापित करें

$$\int_C (3x^2 - 8y^2) dx + (4y - 6xy) dy$$

जहाँ C से घिरे क्षेत्र की सीमा है

$$x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 1$$

Q3 (a) Solve

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3) dx + (2xy e^{xy^2} - 3y^2) dy = 0$$

(5)

हल करें

$$(y^2 e^{xy^2} + 4x^3) dx + (2xy e^{xy^2} - 3y^2) dy = 0$$

(b) Solve

$$(1 + y^2) dx = (\tan^{-1} y - x) dy$$

(5)

हल करें

$$(1 + y^2) dx = (\tan^{-1} y - x) dy$$

(c) Solve

$$p^2 y + 2 p x = y$$

(5)

हल करें

$$p^2 y + 2 p x = y$$

Q4 (a) Find the power series solution of the differential equation

(8)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + (1 - x^2) y = 0$$

$$y(0) = -2, \quad y'(0) = 2$$

अवकल समीकरण का घात श्रेणी समाधान ज्ञात कीजिए

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2x \frac{dy}{dx} + (1 - x^2) y = 0$$

$$y(0) = -2, \quad y'(0) = 2$$

(b) Solve by method of variation of parameters

(7)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = x \sin x$$

मापदंडों की भिन्नता की विधि द्वारा हल करें

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y = x \sin x$$

Q5 (a) Show that the following functions are harmonic and hence find their harmonic conjugate function:

(8)

1. $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$

2. $u = \sinh x \cos y$

दिखाएँ कि निम्नलिखित हार्मोनिक फलन हैं, और उनका हार्मोनिक संयुग्म का पता लगाएं

1. $u = \frac{1}{2} \log (x^2 + y^2)$

2. $u = \sinh x \cos y$

(b) Determine the following Mobius transformation: (7)

1. Which map the points,

$$z = 1, i, -1 \text{ into the points } w = i, 0, -i$$

2. Which map the points,

$$z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty \text{ onto } w_1 = i, w_2 = -1, w_3 = -i$$

निम्नलिखित मोबियस परिवर्तन निर्धारित करें :

1. जो बिंदुओं को मैप करते हैं

$$z = 1, i, -1 \text{ बिंदुओं में } w = i, 0, -i$$

2. जो बिंदुओं को मैप करते हैं

$$z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = \infty \text{ बिंदुओं में } w_1 = i, w_2 = -1, w_3 = -i$$

Q6 (a) Evaluate the following integral using Cauchy Integral formulae: (8)

1. $\int_C \frac{4-3z}{z(z-1)(z-2)} dz$; $C: |z| = \frac{3}{2}$

2. $\int_C \frac{z}{(z^2-3z+2)} dz$; $C: |z-2| = \frac{1}{2}$

कॉची इंटीग्रल फॉर्मूला का उपयोग करके निम्नलिखित अभिन्न का मूल्यांकन करें

1. $\int_C \frac{4-3z}{z(z-1)(z-2)} dz$; $C: |z| = \frac{3}{2}$

2. $\int_C \frac{z}{(z^2-3z+2)} dz$; $C: |z-2| = \frac{1}{2}$

(b) Determine the poles of the following function and residue at each pole: (5)

$$\frac{z^2}{(z-1)(z-2)^2}$$

निम्नलिखित फलन के ध्रुव निर्धारित करें और प्रत्येक ध्रुव पर अवशेष खोजें

(c) Find the residue at $z = 0$ of the following function (2)

$$z \cos \left(\frac{1}{z} \right)$$

निम्नलिखित फलन के अवशेष का $z = 0$ पर पता लगाएं

$$z \cos \left(\frac{1}{z} \right)$$

Q7 (a) Evaluate by changing the order of integration

(3)

$$\int_0^{4a} \int_{\frac{x^2}{4a}}^{2\sqrt{ax}} dy dx$$

एकीकरण के क्रम को बदलकर मूल्यांकन करें

$$\int_0^{4a} \int_{\frac{x^2}{4a}}^{2\sqrt{ax}} dy dx$$

(b) Solve

$$\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y \quad (3)$$

हल करें

$$\frac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$$

(c) Solve

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} + 5 y = e^{2x} \quad (3)$$

हल करें

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 6 \frac{dy}{dx} + 5 y = e^{2x}$$

(d) Find the values of C_1 and C_2 such that the following function is analytic

(3)

$$f(z) = (x^2 + C_1 y^2 - 2xy) + i (C_2 x^2 - y^2 + 2xy)$$

C_1 और C_2 का मान ज्ञात कीजिए जैसे कि निम्नलिखित फलन विश्लेषणात्मक है

$$f(z) = (x^2 + C_1 y^2 - 2xy) + i (C_2 x^2 - y^2 + 2xy)$$

(e) Expand the following function in a Laurent's Series

(3)

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} \quad \text{about } z = 1$$

निम्नलिखित फलन का विस्तार लॉरेंट श्रृंखला में करें

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} \quad \text{about } z = 1$$
